

2023 年硕士研究生招生考试题签

(请考生将题答在答题册上, 答在题签上无效)

第 1 页共 1 页

科目名称: 数学分析

一、(每小题 5 分, 共计 30 分) 计算下列各题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+2x)^{\frac{1}{2}}}{\ln(1+x^2)}$. (5 分)

2. 已知 $x^2y + 3x^4y^3 - 4 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$. (5 分)

3. 已知 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$. (5 分)

4. 已知 $z = f(x+y, xy, \frac{x}{y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. (5 分)

5. 计算 $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x = y$ 相交的圆周. (5 分)

6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域. (5 分)

二、(10 分) 证明: 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, 有 $\frac{\tan x}{x} > \frac{x}{\sin x}$ 成立.

三、(15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) < 0$, $f(b) < 0$, 又有一点 $c \in (a, b)$, $f(c) > 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

四、(15 分) 讨论 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx (p > 0)$ 的敛散性.

五、(15 分) 证明 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续 ($a > 0$), 但在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

六、(15 分) 求函数 $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ 的极值.

七、(15 分) 利用极坐标计算 $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.

八、(15 分) 计算 $\int_{OA} (y^2 - \cos y) dx + x \sin y dy$, 其中 OA 为由 $O(0, 0)$ 到 $A(\pi, 0)$ 经过弧 $y = \sin x$ 的路线.

九、(10 分) 计算 $\oiint_S (x^3 - z) dy dz + (y^3 - x) dz dx + (z^3 - y) dx dy$, 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 表面的外侧.

十、(10 分) 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)^2$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.